III Congresso Internazionale di Studi sulla Sindone, Torino, 5-7 giugno 1998

Un modello probabilistico per quantificare i risultati delle ricerche sulla Sindone di Torino

Giulio Fanti°, Emanuela Marinelli+

° CISAS G. Colombo (Centro Interdipartimentale Studi ed Attività Spaziali),
Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università di Padova, Via Venezia 1, 35137 Padova - Italy
tel. +39-049-8276804, fax +39-049-8276785, e-mail: <fanti@mail.dim.unipd.it>

+Collegamento pro Sindone, Via dei Brusati 84, 00163 Roma
tel. +39-06-66160914, fax +39-06-66160923, e-mail: <cpshroud@tin.it>.(*)

Sommario

Viene proposto un modello probabilistico, di eventi mutuamente escludentisi, capace di sintetizzare i molteplici ed anche contrastanti risultati delle ricerche sulla Sindone di Torino.
Il modello si basa sulla definizione di tre alternative possibili (A= autentica, F= falsa, N= non autentica) per l'origine del lenzuolo e sulla valutazione di ciascuna alternativa sulla base dell'assegnazione di opportune probabilità, con relativa incertezza, a ciascun risultato delle ricerche compiute. A ciascuna affermazione vengono quindi assegnati 7 coefficienti di cui tre relativi alle probabilità di verificarsi delle alternative A, F e N, tre relativi alle corrispondenti incertezze ed un peso relativo all'importanza del risultato.
Come esempio applicativo vengono confrontati i risultati ottenuti da un'analisi probabilistica eseguita su sole 7 affermazioni, con quelli già elaborati più semplicisticamete in bibliografia.

Abstract

To synthetize the variety of the contrasting results coming from the researches done on the Turin Shroud, a probabilistic model capable of consider mutually excluding events, is proposed.
It is based on the definition of three possible alternatives (A=true, F=fake, N=not A or F) regarding the cloth origin. Each alternative is then evaluated from the assignment of the corresponding probability, with relative uncertainty, to each statement, relative to the results of the Shroud investigations. Each statement is composed by 7 coefficients: 3 relative to the corresponding alternative (A, F and N) probability, 3 relative to the corresponding uncertainty and one to evaluate the result importance.
As an example, results obtained from a very simple probabilistic analysis that considers only 7 statements, are compared with that published by other authors.

Abbreviazioni: ST = Sindone di Torino; UST = Uomo delle Sindone di Torino.

(*) Per fini puramente accademici, il contributo individuale dei singoli autori è specificato come segue: G. Fanti (40%) ha sviluppato la formulazione probabilistica; ha inoltre definito le 100 affermazioni con E. Marinelli (60%) che ha garantito l'attendibilità delle stesse fornendo i corrispondenti riferimenti bibliografici.

1) Introduzione

La necessità di costruire un modello probabilistico per valutare i risultati delle ricerche eseguite sulla ST nasce dalla difficoltà di riuscire a giudicare in modo globale e oggettivo la notevole quantità di prove o affermazioni portate a favore o contro una tesi di autenticità o di falsità. Molti studiosi continuano tutt’oggi a sostenere tesi diametralmente opposte[1,2,3] portando a favore solo un numero limitato di affermazioni.
Una volta costruito un modello interpretativo capace di analizzare molte affermazioni, ciascuno studioso dovrebbe essere in grado di formulare giudizi più obiettivi.
In questo studio si prevede di analizzare le 100 affermazioni ritenute più significative, siano esse a favore o contro una particolare tesi. Poiché alcune di esse sono scientificamente accertate, altre sono più dubbie, sorge la necessità di potere pesare ciascuna affermazione in funzione del suo grado di attendibilità.
D’altra parte, dalle numerosissime ricerche effettuate a livello mondiale, non è risultata un’unica affermazione così completa e significativa da dimostrare l’autenticità o falsità della ST.
É opinione degli scriventi che forse la prova più significativa potrà risultare dall’analisi globale di tutti i risultati finora ottenuti.
Sono state eseguite già in passato diverse analisi di questo tipo[4,5]. Tali analisi però, limitate ad un numero più ridotto di prove (cinque o sette), non considerano le probabilità condizionate[1]. Questi risultati vengono rivisti alla luce della nuova impostazione proposta.

2) Considerazioni generali sul modello probabilistico

Si utilizza la statistica inferenziale o induttiva che si occupa del controllo di ipotesi statistiche e della stima di grandezze non note a priori. É necessario che l’ipotesi da controllare sia di natura statistica. La stima della grandezza sconosciuta viene eseguita applicando la formula di Bayes (vedi Appendice 1 e §3.3). Si può dire che la probabilità finale di un’ipotesi subordinatamente all’esito ottenuto è proporzionale al prodotto della probabilità iniziale per la verosimiglianza dell’esito subordinatamente all’ipotesi, essendo la costante di proporzionalità le probabilità dell’esito.
Si considera come spazio campione[2] l’insieme di tutte le sindoni inclusa quella che avvolse Gesù; tale insieme comprende oltre alla ST anche quelle false e quelle esistenti, o non più disponibili perché distrutte, che hanno avvolto corpi di uomini.

Nota [1]: Per esempio nel lancio di un dado a 6 facce, per ogni tiro ci sono 6 alternative corrispondenti al numero della faccia che risulta dal lancio. Se il dado non ha difetti, l’alternativa corrispondente al numero 1 ha una probabilità su 6 di verificarsi; le altre alternative hanno uguale probabilità.
Se si lancia il dado due volte, ci sono (6x6=) 36 diverse alternative: per esempio l’alternativa che esca “1” la prima volta e “6” la seconda ha una probabilità su (6x6=) 36 di verificarsi. Anche l’alternativa che esca “1” la prima e la seconda volta ha una probabilità su 36 di verificarsi.
In tale caso gli eventi non sono mutuamente escludentisi perché sono ammessi anche i “casi misti” e la probabilità risultante è data dal prodotto delle probabilità di ciascuna alternativa.
Nel caso invece del calcolo probabilistico della ST, non si può considerare un’alternativa mista, in parte favorevole ed in parte contraria ad una particolare tesi. In analogia col doppio tiro del dado è come accettare le sole alternative coincidenti, cioè “1,1”, “2,2”, etc.: si tratta di probabilità condizionate dall’evento precedente. In tale caso la probabilità che esca “1” sia la prima che la seconda volta non è più 1/36, ma 1/6 (eq. A1.5) perché vengono esclusi dall’analisi i casi misti “1,2”, “1,3”, .., “6,1”, .. , “6,5”.
Nota [2]: per chiarire meglio la definizione di alcuni concetti probabilistici e di statistica inferenziale, si riporta un esempio applicativo che spiega per analogia il procedimento logico applicato alla ST. Si fa riferimento ad un mazzo di 52 carte da “bridge” che sia stato preventivamente “segnato” da un baro ed alla distribuzione ad un giocatore di 13 carte da gioco.

Dallo spazio campione si considera l'evento E consistente nell'estrazione della ST; scopo principale del lavoro non è quello di valutare la corrispondente probabilità di estrazione a priori, ma quello di valutare la probabilità a posteriori che la ST sia appartenuta ad un particolare uomo, Gesù, sulla base di informazioni ottenute da ricerche effettuate sul lenzuolo.
Per fare ciò è necessario innanzitutto definire le possibili alternative dell'evento e successivamente, tramite l'analisi dei risultati di ricerche, definire un grado di probabilità a posteriori per ciascuna alternativa.
Lo sviluppo del modello è basato sulla concezione soggettivistica della statistica, secondo la quale la probabilità di un evento è definita come la misura del grado di fiducia che un individuo coerente[3] attribuisce al verificarsi dell'evento stesso. Essa permette di pesare i diversi coefficienti assegnati in funzione dell'attendibilità dell'affermazione.
La valutazione dei diversi coefficienti verrà eseguita dal singolo individuo secondo l'impostazione soggettivistica della probabilità intesa come misura del grado di fiducia attribuito al verificarsi di una certa alternativa. Il modello viene poi integrato da una valutazione dell'incertezza dei parametri assegnati.
Esistono diverse perplessità sull'accettazione di un atteggiamento soggettivistico nei riguardi di problemi scientifici e tali perplessità aumentano nel caso si tratti di problemi con implicazioni di tipo religioso che possono influenzare in modo non trascurabile il giudizio dell'individuo che in tale caso rischia di essere poco coerente.
Secondo gli autori, un giudizio soggettivo dell'assegnazione potrà tuttavia essere reso sufficientemente significativo se il risultato finale sarà ottenuto dalla sintesi di risultati espressi da molti ricercatori aventi anche diverse linee di pensiero.
Per questo motivo la ricerca si sviluppa in tre fasi diverse: la prima, oggetto del presente lavoro, consiste nella formulazione di un modello interpretativo di tipo probabilistico delle prove e delle affermazioni; la seconda, riguarda la sintesi, in un centinaio di prove, delle innumerevoli analisi significative, più o meno scientifiche, eseguite sulla ST; la terza, eseguibile da ognuno che sia interessato, consiste nell'assegnare a ciascuna affermazione gli opportuni parametri richiesti dal modello e nel giungere quindi a diversi risultati. Dovrà poi essere eseguita una sintesi finale dei risultati forniti.

3) Formulazione del modello probabilistico

---

a) Lo spazio campione è l'insieme di tutte le possibili mani che possono essere distribuite ad un giocatore ed esse sono in totale $\binom{52}{13} = 6.35 \cdot 10^{11}$.

b) l'evento consiste nell'avere estratto dallo spazio campione quel particolare mazzo di 13 carte. c) Si possono definire per esempio le seguenti 3 alternative mutuamente escludentisi che possono essere importanti per il giocatore:
A="avere in mano 4 re", F="avere in mano 4 assi", N="non avere in mano 4 re o 4 assi".
In questa sede non interessa solo la valutazione della probabilità a priori di avere in mano una delle 3 alternative, ma interessa anche la valutazione da parte del baro delle probabilità che l'avversario abbia in mano una delle tre alternative, a partire dalla conoscenza di alcuni dettagli. Per esempio il baro sa che (1)"tutte le figure hanno un segno rosso", (2)"tutte le carte di valore dispari hanno un segno verde", (3)"il fante, il re e l'asso di cuori hanno un segno blu", etc.
Si suppone poi che il baro riesca a leggere il colore dei segni di tutte le carte dell'avversario. A partire da questi dati si deve quindi valutare la probabilità a posteriori che l'avversario abbia in mano l'alternativa A, F o N.
Nota [3]: Per esempio la probabilità di un evento può essere intesa come la quota di scommessa che un individuo coerente è disposto a pagare per ricevere l'importo di una unità se l'evento si verifica. Si tratta di individuo coerente nel senso che egli deve accettare la scommessa della quota prescelta sia da giocatore che da banco.

3.1) Definizione delle alternative.

Si considerano 3 diverse alternative che hanno causato l'evento E; esse comprendono le ipotesi più plausibili riguardanti l'origine della ST; esse sono possibili, ma tra loro escludentisi, e vengono nominate A, F, N:

-1) Alternativa **A**: la ST è *autentica*; essa ha avvolto il corpo di Gesù;

-2) Alternativa **F**: la ST è *falsa, medievale o post-medievale*: può essere un dipinto o l'opera di un cosiddetto "geniale falsario assassino";

-3) Alternativa **N**: la ST *non è autentica*, ma non è nemmeno falsa, medievale o post-medievale; non sono quindi verificata le alternative "A" ed "F"; in tale alternativa sono comprese tutte le altre possibili cause della formazione della ST, non escluso il miracolo.

Ovviamente il modello è adatto anche all'analisi di 2 sole alternative, per esempio " la ST è o non è un dipinto"; in tale caso si dovranno porre nulli tutti i coefficienti relativi alla terza alternativa.

3.2) Assegnazione dei valori probabilistici

All'alternativa A si assegna una probabilità "a priori" $P^I(A)$ ed una incertezza assoluta i^I_A, all'alternativa F una probabilità "a priori" $P^I(F)$ ed una incertezza assoluta i^I_F, all'alternativa N una probabilità "a priori" $P^I(N)$ ed una incertezza assoluta i^I_N.
In un altro lavoro[6] vengono assegnate e discusse le seguenti probabilità a priori con le corrispondenti incertezze:

$P^I(A)=0.05$; $i_A{}^I=0.02$; $P^I(F)=0.35$; $i_F{}^I=0.05$; $P^I(N)=0.60$; $i_N{}^I=0.05$

A ciascuna affermazione j-esima, devono essere assegnati i seguenti parametri:
- a_j = probabilità che si verifichi l'alternativa A in seguito all'affermazione in esame,
- f_j = probabilità che si verifichi l'alternativa F in seguito all'affermazione in esame,
- n_j = probabilità che si verifichi l'alternativa N in seguito all'affermazione in esame,
- i_{aj} = incertezza assoluta assegnata alla probabilità a_j dell'affermazione in esame,
- i_{fj} = incertezza assoluta assegnata alla probabilità f_j dell'affermazione in esame,
- i_{nj} = incertezza assoluta assegnata alla probabilità n_j dell'affermazione in esame,
- p_j = peso assegnato all'affermazione in esame.

Il peso p_j può venire valutato in base a diversi fattori legati alla scientificità dell'affermazione, alla sua significatività ed all'eventuale dipendenza da altre prove:

$$p_j = p_{1j}\, p_{2j}\, p_{3j} \qquad (1)$$

essendo:

-p_{1j}: peso correlato alla *scientificità* dell'affermazione; può essere utilizzato uno schema del tipo:
  - affermazione pubblicata su rivista internazionale: $p_{1j}=1$
  - affermazione pubblicata: $p_{1j}=0.8$
  - affermazione poco documentata o ipotesi non verificata: $p_{1j}=0.1$
  - affermazione avente incertezza relativa i_{aj}/a_j , i_{fj}/f_j o i_{nj}/n_j superiori al 50%: $p_{1j}=0$;

-p_{2j}: peso correlato all'*importanza* dell'affermazione secondo lo schema:
  - affermazione di estremo interesse: $p_{2j}=3$
  - affermazione interessante: $p_{2j}=2$
  - affermazione standard: $p_{2j}=1$
  - affermazione di scarso interesse: $p_{2j}=0.5$;

- p_{3j} effetto di un possibile grado di *correlazione* con altre affermazioni con valori compresi fra 0 e 1. Per esempio se esistessero due affermazioni identiche si deve assegnare a ciascuna il valore p_{5j} =0,5.

Le affermazioni soggette ad analisi sono per ipotesi semplificativa tra loro mutuamente indipendenti; l'eventuale dipendenza che potrà essere riscontrata, verrà considerata tramite il peso p che viene proposto in questo lavoro per potere confrontare fra loro affermazioni di diversa importanza.
In [6] le affermazioni sono suddivise per argomenti per potere più facilmente assegnare tali valori. Per esempio il non credente potrà assegnare $p_{3j}=0$ alle affermazioni riguardanti l'Antico e Nuovo Testamento se non le riterrà significative. Il credente invece potrà assegnare valori di p_{3j} compresi fra 0,5 e 1 alle stesse affermazioni perché, in alcune di esse, potrebbe essere individuata una correlazione con la definizione dell'alternativa A o con altre affermazioni considerate.
Il caso $p_j=1$ non ha alcuna influenza nel prodotto (eq. 3a,b,c) e quindi una tipica affermazione deve avere tale coefficiente.
Il caso $p_j=2$ eleva al quadrato il coefficiente probabilistico e quindi è come considerare due volte nell'analisi la stessa l'affermazione; si applica quindi ad affermazioni di elevata significatività.
Nel caso $p_j=0,5$ si calcola la radice quadrata del coefficiente a_j, f_j, n_j; si impone quindi che la affermazione sia pari a mezza affermazione tipica.
Per il principio delle probabilità totali (o dell'addizione, eq. A1.3), per ogni affermazione j-esima, deve essere verificata la condizione relativa alla combinazione di alternative mutuamente escludentisi:

$$a_j + f_j + n_j = 1 \qquad (2)$$

cioè le probabilità assegnate per una certa affermazione devono essere in totale il 100%.

3.3) Costruzione del modello.

Si tratta di accettare o meno un'alternativa fra le possibili escludentisi a vicenda. Il criterio probabilistico di accettazione si basa sull'analisi delle affermazioni ricavate da vari esperimenti o da studi eseguiti sulla ST.
Il risultato dell'analisi consiste nell'assegnare valori di probabilità alle alternative sviluppando i seguenti punti:

- a) FASE I. Vengono assegnate le probabilità a priori $P^I(A)$, $P^I(F)$, $P^I(N)$, delle tre alternative ignorando completamente i risultati delle ricerche eseguite.

- b) FASE II. Si calcolano le probabilità a posteriori $P^{II}(A)$, $P^{II}(F)$, $P^{II}(N)$ o probabilità subordinate, di seguito indicate come $P^{II}(I)$, essendo l'indice I corrispondente alle tre alternative A, F, N e P(E) la probabilità dell'evento E subordinata al verificarsi dell'alternativa I.
Sono date m affermazioni da valutare tramite l'assegnazione dei coefficienti a_j, f_j, n_j, p_j (di indice j variabile da 1 a m). Le probabilità $P^{II}(I)$ risultano dalla composizione delle singole probabilità (a_j, f_j, n_j) assegnate, per il principio delle probabilità composte (vedi eq. A1.4):

$$P^{II}(A) = \prod_{j=1}^{m} a_j^{p_j} \;;\; P^{II}(F) = \prod_{j=1}^{m} f_j^{p_j} \;;\; P^{II}(N) = \prod_{j=1}^{m} n_j^{p_j} \qquad (3a, b, c)$$

Tenendo conto dei pesi p_j assegnati alle varie affermazioni, il numero effettivo m_1 di casi considerati, in genere diversi da m, diviene quindi:

$$m_1 = \sum_{j=1}^{m} p_j \,. \qquad (4)$$

É auspicabile che sia verificata la condizione che m_1 sia uguale a m, numero di prove; in tale modo si può fare un riferimento probabilistico diretto al numero m di prove considerate.

-c) Si calcolano le probabilità finali P*(I) a meno della costante di Bayes:

$$P^*(I) = P^I(I)\, P^{II}(I), \quad I=A,\, F,\, N \qquad (5)$$

-d) Si calcolano le probabilità P(E) dell'evento E date le tre alternative che risultano, per il principio delle probabilità totali (vedi eq. A1.3):

$$P(E) = \Sigma_{(I=A,F,N)}\, P^*(I) = P^I(A)\, P^{II}(A) + P^I(F)\, P^{II}(F) + P^I(N)\, P^{II}(N) \qquad (6)$$

-e) <u>FASE III.</u> Essendo le alternative A, F, N dell'evento considerato possibili, ma tra loro escludentisi, sono da scartare le possibilità miste. Si calcolano quindi le probabilità finali $P^{III}(A)$, $P^{III}(F)$, $P^{III}(N)$ in base all'applicazione della formula di Bayes:

$$P^{III}(I) = \frac{P^{I}(I) \quad P^{II}(I)}{P(E)} \;, \qquad I=A,\, F,\, N \qquad (7)$$

4) Analisi dell'incertezza

Nonostante il soggettivismo dell'impostazione probabilistica, si ritiene necessario valutare l'ordine di grandezza dell'incertezza del risultato, in riferimento alla Guida per l'espressione dell'incertezza[7], ipotizzando distribuzioni di probabilità rettangolari dell'incertezza, convertite in equivalenti gaussiane dividendo i valori per 1,7. Sono da intendersi, ove non specificato diversamente incertezze assolute.
Vengono assegnate le incertezze i_A^I , i_F^I , i_N^I delle probabilità a priori e le incertezze i_{aj}, i_{fj}, i_{nj}, (j =1,m) delle probabilità delle m affermazioni considerate.
Scopo dell'analisi è la determinazione delle incertezze i_A^{III} , i_F^{III} , i_N^{III} delle probabilità finali.
Si assume l'ipotesi semplificativa che il grado di correlazione sia nullo e che quindi non compaiano le componenti miste di incertezza nelle formule di propagazione.

<u>4.1 Regole pratiche per l'applicazione del modello</u>

Vengono elencati alcuni criteri proposti per ottenere risultati attendibili.

-1) Se le probabilità finali $P^{III}(A)$, $P^{III}(F)$, $P^{III}(N)$, fossero affette da incertezza troppo elevata, è necessario che per ogni affermazione l'incertezza relativa $i_I/P(I)$ sia inferiore ad un prefissato valore. L'incertezza relativa limite nel presente lavoro viene assunta[4] pari al 50%.

---

[4] L'incertezza relativa limite è funzione sia del numero di affermazioni oggetto di analisi, sia del risultato in quanto (eq. 7) risultati probabilistici percentualmente molto diversi permettono in alcuni casi di accettare anche incertezze relativamente elevate. Per definire l'incertezza limite i_l , si può assumere una relazione del tipo:

$$i_l = \frac{K}{\sqrt{m}}\,\%$$

essendo m il numero di affermazioni in esame e K un coefficiente scelto pari a 500 nel presente lavoro.

Se l'incertezza supera il valore limite si assume che la affermazione sia poco significativa e la si scarta assegnando un peso p=0.

-2) Dato che nessuna affermazione, in riferimento alle ricerche eseguite[6], è in grado di dimostrare con assoluta certezza una delle alternative (in caso contrario sarebbe inutile applicare il modello probabilistico proposto!), si impone che il valore minimo assegnato alle alternative a_j, f_j, n_j sia superiore o uguale a 0.0001. Ciò equivale a supporre di non disporre di affermazioni così certe da assegnare probabilità migliori di 1 su 10000.

-3) Si ottiene (eq. 2):

$$a_j = 1 - f_j - n_j; \quad f_j = 1 - a_j - n_j; \quad n_j = 1 - a_j - f_j \qquad \text{(8a, b, c)}$$

e quindi, assegnate due incertezze assolute, si valuta la terza secondo una delle relazioni derivanti dall'applicazione dell'eq. (A2. 10):

$$i_{aj} = \sqrt{i_{fj}^2 + i_{nj}^2}\;; \quad i_{fj} = \sqrt{i_{aj}^2 + i_{nj}^2}\;; \quad i_{nj} = \sqrt{i_{aj}^2 + i_{fj}^2} \qquad \text{(9a,b,c)}$$

<u>4.2) Propagazione dell'incertezza al risultato.</u>

Per determinare le incertezze i_A^{II} , i_F^{II} , i_N^{II} delle probabilità $P^{II}(I)$, si applica l'eq. (A2. 10) alle equazioni (3a,b,c) e si ottiene:

$$i_A^{II} = \left(\prod_{j=1}^{m} a_j^{p_j}\right)\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[\left(p_j \frac{i_{a_j}}{a_j}\right)\right]^2} \qquad \text{(10a)}$$

$$i_F^{II} = \left(\prod_{j=1}^{m} f_j^{p_j}\right)\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[\left(p_j \frac{i_{f_j}}{f_j}\right)\right]^2} \qquad \text{(10b)}$$

$$i_N^{II} = \left(\prod_{j=1}^{m} n_j^{p_j}\right)\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[\left(p_j \frac{i_{n_j}}{n_j}\right)\right]^2} \qquad \text{(10c)}$$

Per determinare le incertezze i_A^{III} , i_F^{III} , i_N^{III} delle probabilità finali $P^{III}(I)$, si applica l'eq. (A2. 10) all'eq. (7) e si ottiene:

$$i_A^{III} = P^{III}(A)\sqrt{\left(\frac{i_A^{I}}{P^{I}(A)}\right)^2 + \left(\frac{i_A^{II}}{P^{II}(A)}\right)^2 + \left(\frac{i_{P(E)}}{P(E)}\right)^2} \qquad \text{(11a)}$$

$$i_F^{III} = P^{III}(F)\sqrt{\left(\frac{i_F^{I}}{P^{I}(F)}\right)^2 + \left(\frac{i_F^{II}}{P^{II}(F)}\right)^2 + \left(\frac{i_{P(E)}}{P(E)}\right)^2} \qquad \text{(11b)}$$

$$i_N^{III} = P^{III}(N)\sqrt{\left(\frac{i_N^{I}}{P^{I}(N)}\right)^2 + \left(\frac{i_N^{II}}{P^{II}(N)}\right)^2 + \left(\frac{i_{P(E)}}{P(E)}\right)^2} \qquad \text{(11c)}$$

essendo $i_{P(E)}$ l'incertezza sulla probabilità dell'evento E:

$$i_{P(E)} = \sqrt{(P^{I}(A)\cdot i^{II}{}_{A})^2 + (P^{II}(A)\cdot i^{I}{}_{A})^2 + (P^{I}(F)\cdot i^{II}{}_{F})^2 + (P^{II}(F)\cdot i^{I}{}_{F})^2 + (P^{I}(N)\cdot i^{II}{}_{N})^2 + (P^{II}(N)\cdot i^{I}{}_{N})^2} \tag{12}$$

Estendendo alle probabilità finali l'eq. (2), si ha:

$$P^{III}(A) + P^{III}(F) + P^{III}(N) = 1 \tag{13}$$

e quindi:

$$P^{III}(A) = 1 - P^{III}(F) - P^{III}(N); \quad P^{III}(F) = 1 - P^{III}(N) - P^{III}(A); \quad P^{III}(N) = 1 - P^{III}(A) - P^{III}(F) \tag{14}$$

Assegnate due incertezze assolute si può valutare la terza secondo una delle relazioni derivanti dall'applicazione dell'eq. (A2. 10):

$$i_a{}^{III} = \sqrt{\left(i_f{}^{III}\right)^2 + \left(i_n{}^{III}\right)^2}\;; \quad i_f{}^{III} = \sqrt{\left(i_n{}^{III}\right)^2 + \left(i_a{}^{III}\right)^2}\;; \quad i_n{}^{III} = \sqrt{\left(i_a{}^{III}\right)^2 + \left(i_f{}^{III}\right)^2} \tag{15a,b,c}$$

5) Risultati

Come esempio, si applica il modello proposto, alle affermazioni discusse in [4]: vengono considerate 7 affermazioni supponendo l'esistenza di due sole alternative:

- *alternativa A: la ST è autentica;*
- *alternativa F: la ST è falsa,*

alle quali l'autore può avere assegnato implicitamente le seguenti probabilità a priori:

- $P^I(A)=0.5$; $P^I(F)=0.5$.

Non essendo considerata l'alternativa N ed il peso p, si pone:

- $P^I(N) = 0$; $P^{II}(N) = 0$; $P^{II}(N) = 0$; $p_j=1$;

non viene inoltre valutata l'incertezza nella prima fase dell'esempio; nella seconda fase gli autori assegneranno a titolo di esempio alcuni valori indicativi.

<u>5.1 Esempio applicativo parte I</u>

Le affermazioni oggetto dell'analisi sono le seguenti:

1) L'UST ha avuto un lenzuolo [a_1=0.667, f_1=0.333];
2) L'UST è rimasto poco tempo nel lenzuolo [a_2=0.95, f_2=0.05];
3) Il sangue dell'UST risulta perfettamente separato dalla tela senza sbavature o striature [a_3=0.98, f_3=0.02];
4) L'UST è stato fissato alla croce con chiodi [a_2=0.333, f_2=0.667];
5) Sull'UST appaiono le ferite di un casco di spine: [a_2=0.999, f_2=0.001];
6) L'UST ha ricevuto un colpo di lancia al costato destro [a_2=0.80, f_2=0.20];
7) Il volto dell'UST presenta un'espressione maestosa e triste, e nello stesso tempo, nobilmente serena [a_2=0.9999, f_2=0.0001];

Applicando le eq. (3a,b), si ottengono le seguenti probabilità $P^{II}(I)$:

- $P^{II}(A) = 0.1653$; $P^{II}(F) = 4.444 \bullet 10^{-12} = 1 \;/\; 225\,000\,000\,000$

Dall'eq. (6) si ottiene P(E):

- $P(E) = P^{I}(A)\, P^{II}(A) + P^{I}(F)\, P^{II}(F) = 0.08266$

Dall'eq. (7) si ottengono le probabilità finali $P^{III}(A)$, $P^{III}(F)$:

- $P^{III}(A) = 0.9999...$; $P^{III}(F) = 5.376 \cdot 10^{-11} = 1 / 18\,600\,000\,000$

Anziché una probabilità su 225 miliardi risulterebbe quindi una probabilità su circa 18 miliardi[5].

<u>5.2 Esempio applicativo parte II</u>

Si assume[6]: $P^{I}(A)=0.05$; $i_A{}^{I}=0.02$; $P^{I}(F)=0.95$; $i_F{}^{I}=0.02$.
Dall'eq. (9a,b), risulta $i_a=i_f=i$; si assegnano quindi le seguenti incertezze:

1) i=0,1; 2) i=0,02; 3) i=0,01; 4) i=0,1; 5) i=0,0003; 6) i=0,08; 7) i=0,00003

Risulta quindi:

$P^{II}(A) = 0.165$; $P^{II}(F) = 4.44 \cdot 10^{-12}$; m1=7; $P(E) = 0.00826$;
$P^{III}(A) = 0.99999...$; $P^{III}(F) = 5.11 \cdot 10^{-10} = 1/1\,958\,000\,000$; $i = 5.5 \cdot 10^{-10}$

Risulta quindi che la probabilità che la ST sia falsa è:

$P^{III}(F) = 5 \cdot 10^{-10} \pm 5 \cdot 10^{-10}$

pari a circa 1 / 2 000 000 000 con un'incertezza del 100%. L'elevata incertezza del risultato è dovuta alle incertezze, percentualmente di entità elevata, che sono state assegnate.
Il risultato $P^{III}(F)$ può quindi variare, con un grado di confidenza del 95%, tra 0 e 1/1 000 000 000.
Secondo le affermazioni considerate e le probabilità con relative incertezze assegnate, questo significa che la probabilità che la ST sia falsa, anziché essere pari a una su 225 miliardi[4], essa oscilla tra zero ed una probabilità su un miliardo.

6) Discussione

A questo punto può sorgere un dubbio sul significato fisico del risultato dell'indagine probabilistica proposta; il dubbio riguarda l'interpretazione del risultato in termini di accettazione o meno di una possibile alternativa.
Si può ricondurre il problema alla definizione di una probabilità limite oltre la quale il risultato non sia scientificamente accettabile.
In riferimento ad un esempio pratico, si consideri la seguente affermazione "Ogni anno, un cubo in granito di 1 m di lato, non sollecitato da forze esterne, si solleva di almeno un metro da terra".
Chiunque è sicuro che tale affermazione sia assolutamente falsa perché si descrive un fenomeno fisicamente impossibile. Tuttavia questo non risulterebbe così chiaramente da una dettagliata indagine probabilistica. Si dovrebbe considerare la combinazione probabilistica di tutte le forze indotte dagli urti casuali delle molecole costituenti sia il blocco in granito che l'ambiente circostante.

[5] <u>Nota</u>: Se non venissero considerate le probabilità $P^{I}(I)$, si giungerebbe alle seguenti probabilità finali:
$P^{III}(A) = 0.9999...$; $P^{III}(F) = 2.688 \cdot 10^{-11} = 1 / 37\,200\,000\,000$.

Il calcolo delle probabilità fornirebbe un risultato possibile con una probabilità di uno diviso un numero seguito da qualche decina di miliardi di zeri.
Se dal punto di vista teorico il risultato è estremamente improbabile ma possibile, dal punto di vista pratico il risultato è invece da considerarsi effettivamente impossibile.
Non è ancora completamente definita quale possa essere la probabilità limite oltre la quale considerare "impossibile" un fenomeno fisico.
Si può pensare all'esempio del gioco della roulette. La probabilità che esca il numero 36 dopo una giocata è 1/37 (esistono tutte le possibilità comprese tra lo zero ed il numero 36); la probabilità che esca due volte consecutive il numero 36 è $1/37^2$=1/1369; la probabilità che esca cento volte consecutive il numero 36 è $1/37^{100}$ cioè un uno diviso un numero seguito da 156 zeri.
Secondo gli autori, potrebbe essere definita "impossibile" un'alternativa che abbia una probabilità di verificarsi dell'ordine di $1/10^{30}$ che corrisponderebbe alla probabilità di ottenere 19 volte consecutive[6] l'uscita del numero 36 alla roulette.
Secondo questa impostazione la probabilità $P^{III}(F)$, variabile tra zero e 1 su un miliardo fornisce la seguente informazione: anche se è molto improbabile che la ST sia falsa, tale alternativa non è da escludersi. Risulterebbe però più probabile che esca il numero 36 per 5 volte consecutive al gioco della roulette che la ST sia falsa.

7) Conclusioni

Il modello probabilistico proposto, per eventi mutuamente escludentisi, è capace di sintetizzare i molteplici ed anche contrastanti risultati delle ricerche sulla ST.
Esso si basa sulla definizione di tre alternative possibili (A= autentica, F= falsa, N= non autentica) per l'origine del lenzuolo e sulla valutazione di ciascuna alternativa sulla base dell'assegnazione di opportune probabilità, con relativa incertezza, a ciascun risultato delle ricerche compiute.
L'esempio applicativo considerato confronta i risultati ottenuti da un'analisi probabilistica eseguita su sole 7 affermazioni, con quelli già elaborati più semplicisticamete in bibliografia indicando che l'alternativa (F) può variare, con un grado di confidenza del 95%, tra 0 e 1/1 000 000 000. La probabilità che la ST sia falsa, secondo le affermazioni considerate, anziché essere di una su 225 miliardi, come proposto in bibliografia[4], oscilla quindi tra zero ed una probabilità su un miliardo.
Se vengono rispettate tutte le condizioni di applicabilità, il modello può essere utilizzato per sintetizzare un numero assai più elevato di risultati scientifici (anche 100): questo è l'oggetto di un altro studio[6].

Bibliografia

1) P. Baima Bollone: "La Sindone, la prova", ed. Mondadori 1998.
2) O. Petrosillo, E. Marinelli: "La Sindone: storia di un enigma", ed. Rizzoli 1998
3) C. Papini: "Sindone: una sfida alla scienza e alla fede", ed. Claudiana, Torino, 1998.
4) P. DeGail: "Le visage de Jesus Christ et son linceul" Éditions France-Empire, Paris 1972
5) B. Barberis, P. Savarino: "Sindone, radiodatazione e calcolo delle probabilità", ed Elle Di Ci, 1997

Nota[6]: Per ottenere il risultato si applica la relazione :

$$n = [\log_{10} 10^{30}] \; / \; [\log_{10} (1/37)] \; = \; 30 / 1{,}568 = 19$$

essendo n il numero di volte consecutive che esce il numero 36.

6) G. Fanti, E. Marinelli "Risultati di un modello probabilistico applicato alle ricerche eseguite sulla Sindone di Torino ", III Congresso Internazionale di Studi sulla Sindone, Torino, Giugno 1998.
7) ISO-GUM "Guide to expression of Uncertainty in Measurement", ISO 1993
8) B. de Finetti: "La logica dell'incerto", Il Saggiatore, Milano 1989.
9) D. Costantini: "Introduzione alla probabilità" Boringhieri, Torino 1977.

APPENDICE 1: Richiami di probabilità e di stima statistica

Si consideri un qualsiasi insieme Ω di elementi ω; l'insieme Ω è nominato *spazio campione* e gli elementi ω *punti campione*.

Evento casuale è un insieme E di punti campione e quindi un sottoinsieme dello spazio campione Ω. L'insieme formato da un solo punto campione è detto *semplice*, se è formato da più punti è detto *composto*.

Si ricorda dall'algebra degli eventi che, dati due eventi E_1 ed E_2, l'evento $E_1 \cap E_2$ (intersezione) si verifica se e solo se si verificano congiuntamente E_1 ed E_2, mentre l'evento $E_1 \cup E_2$ (unione) si verifica se e solo se si verificano almeno uno dei due eventi E_1 ed E_2,

Un evento è detto *totale* se si può realizzare in diversi modi escludentisi a vicenda ed ha per *probabilità la somma delle probabilità delle diverse alternative*.

Si chiama misura di probabilità o *distribuzione di probabilità* su un insieme Ω una funzione P definita per tutti gli eventi di Ω con le seguenti proprietà:

- -a) ad ogni evento è associato un numero reale non negativo P(E) detto probabilità dell'evento E
- -b) se si hanno 2 eventi E_1 ed E_2 di Ω mutuamente esclusivi, tali che $P(E_1 \cap E_2) = 0$, si ha:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1)+P(E_1) \qquad (A1.1)$$

- -c) la probabilità che si verifichi Ω è pari a uno: $P(\Omega)=1$.

Due eventi A e B si dicono *indipendenti* se la probabilità di intersezione di A e B è uguale al prodotto[7] delle probabilità di A e di B:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \qquad (A1.2)$$

Si considerano eventi indipendenti nel senso che i diversi punti campione considerati non sono tra loro correlati.

La *probabilità totale* che si verifichi almeno uno di più eventi escludentisi a vicenda o mutuamente incompatibili è pari alla somma delle probabilità dei singoli eventi (principio delle probabilità totali o dell'addizione). La probabilità dell'evento unione di n eventi mutuamente esclusivi è la somma delle probabilità[8] dei singoli eventi,

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \qquad (A1.3)$$

La *probabilità composta* che si verifichino più eventi mutuamente compatibili è pari al prodotto delle probabilità dei singoli eventi (principio delle probabilità composte o della moltiplicazione):

$$P(E) = \prod_{i=1}^{n} P(E_i) \qquad (A1.4)$$

Nota[7]: L'indipendenza è verificata se il risultato del primo evento non condiziona la probabilità del secondo. Per esempio si consideri un dado a 6 facce senza difetti lanciato 2 volte: la probabilità che la prima volta esca 4 e la seconda esca 6 corrisponde ad (1/6)(1/6)=1/36.

Nota[8]: Per esempio la probabilità che esca 1 oppure 3 oppure 6 in un lancio di un dado senza difetti è (1/6 + 1/6 + 1/6) = 0,50.

che è valida se gli eventi sono mutuamente indipendenti; se gli eventi sono dipendenti, la probabilità dell'evento i-esimo è calcolata tenendo conto che tutti gli eventi precedenti si sono verificati.
Eventi *condizionati o subordinati* si hanno nel caso non sia verificata l'indipendenza statistica fra due eventi A e B. Se l'evento A non è indipendente da B, si denota con il simbolo "A|B" e si legge "A condizionato a B". La *probabilità* dell'evento A *condizionata* all'evento B è:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (A1.5)$$

che si può scrivere, secondo il principio delle probabilità composte come[9]:

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B) = P(A)\, P(B|A) \qquad (A1.6)$$

l'ultima uguaglianza essendo verificata se $P(A) \neq 0$.
Eventi *indipendenti*: se invece gli eventi A e B sono indipendenti, cioè se la probabilità di intersezione di A e B è uguale al prodotto delle probabilità di A e di B, si ha:

$$P(A|B) = P(A) \qquad (A1.7)$$

cioè non è di nessun rilievo il fatto che si verifichi B ai fini dell'evento A. In tale caso secondo il *principio delle probabilità composte* si ha[10]:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad (A1.8)$$

Si tratta di accettare o meno un'alternativa A, F, N fra le possibili a priori, ciascuna delle quali si esclude a vicenda, in base all'analisi delle affermazioni ricavate da diversi esperimenti e studi sulla ST.
Si consideri la probabilità che l'evento E che si verifica ad una ed una sola delle tre alternative A, F, N. Per il principio delle probabilità totali, la probabilità dell'evento E è:

$$P(E) = \sum_{I=A,F,N} P(E \cap I) \qquad (A1.9)$$

Per il principio delle probabilità composte, $P(E \cap I)$ è la probabilità che si verifichi sia l'evento E che l'alternativa I e corrisponde all'equazione (A1.6) avendo sostituito A e B a I ed E.

APPENDICE 2: Richiami di analisi dell'incertezza

Siano date una variabile x e una variabile dipendente y=f(x). Si suppone di valutare x un certo numero di volte, per stabilirne il valore medio e la relativa ripetibilità ($t\ \sigma$) data dal prodotto dello scarto quadratico medio per il fattore di copertura t che dipende dal grado di confidenza stabilito.

Nota[9]: Per esempio nel lancio di un dado senza difetti a 6 facce, l'evento A sia l'uscita della faccia col 4 e l'evento B sia l'uscita di una faccia col numero pari. La probabilità di A è 1/6 e la probabilità di B è 1/2. La probabilità di A condizionata a B, è maggiore e risulta P(A|B) =1/3 poiché dall'eq. (A1.5) si ha P(B)=1/2 e $P(A \cap B)$=1/6.

Nota[10]: Per esempio da un'urna con 10 dischetti di cui 3 rossi e 7 neri, si estraggano due dischetti senza rimettere il primo nell'urna e si supponga che ogni dischetto abbia uguale probabilità di essere estratto. Si considerano i seguenti eventi: **A**: "al primo colpo si estrae un dischetto rosso"; **B**: "al primo ed al secondo colpo si estrae un dischetto rosso"; **C**: "al secondo colpo si estrae un dischetto rosso". Lo spazio campione Ω è costituito da (10x9=90) risultati. A è formato da (3x9= 27) punti perché ci sono 3 possibili scelte per il primo dischetto e 9 per il secondo; B è formato da (3x2=6) punti. Le probabilità degli eventi A, B, C sono: **P(A)** =(3x9):(10x9) **= 0.3** ; **P(B)** = (3x2):(10x9) = 1:15 **= 0.0667**. **P(C)** =(7x3 + 3x2 perché è possibile pescare o uno dei 7 dischetti neri la prima volta e uno dei 3 rossi la seconda volta, oppure uno dei 3 dischetti rossi la prima volta e uno dei 2 rimasti la seconda volta):(10x9) **= 0.3** La probabilità condizionata di C dato A, cioè la probabilità di C supponendo verificato l'evento A è:

$$\mathbf{P(C\,|\,A)} = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = (6/90)/\ \ (27/90)\ \ = 20/90 = \ \mathbf{0.222}$$

Se invece si rimettesse il dischetto pescato nell'urna si avrebbero eventi indipendenti e quindi la probabilità **P'(B)** che si verifichi l'evento C subordinato ad A (e quindi l'evento B) sarebbe:

P'(B) = P(A) P(C) = 0.3x0.3 **= 0.09** > **P(B)** = 0.06667

essendo P(A)=(3x10=30), P(B)=(3x3=9), P(C)=(10x3=30).

In generale si adotta il grado di confidenza (P= 95%) in tutti i calcoli dell'incertezza a cui corrisponde un fattore di copertura t=2 se il campione è sufficientemente numeroso.

Il valore di x sarà compreso entro l'intervallo $\bar{x} \pm t\sigma$, e si suppone che il valore di y cada entro l'intervallo definito da:

$$\bar{y} \pm d\,y = f(\bar{x} \pm t\sigma) \qquad \text{(A2.1)}$$

Sviluppando la (4.1) in serie di Taylor, si ottiene:

$$\bar{y} \pm d\,y = f(\bar{x}) \pm \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\bar{x}} t\sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\bar{x}} (t\,\sigma)^2 + .. \right] \qquad \text{(A2.2)}$$

Il valore medio di y sarà pari a $f(\bar{x})$. Il termine fra parentesi quadra sarà quindi la stima di $d\,y$. Facendo un'approssimazione lineare di $d\,y$, si ottiene:

$$d\,y \approx \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\bar{x}} .\ t\,\sigma \qquad \text{(A2.3)}$$

ove il termine $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\bar{x}}$ è l'indice della sensibilità di y ai cambiamenti di x. L'incertezza i_y di y dipende dall'incertezza i_x di x, secondo la relazione:

$$i_y = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\bar{x}} i_x \qquad \text{(A2.4)}$$

Estendendo il modello a relazioni multivariabili, si considera un risultato q determinato dalla relazione:

$$q = f_1(x_1, x_2, ..., x_L); \qquad (x_1, ..., x_L, = \text{variabili indipendenti}) \qquad \text{(A2.5)}$$

La migliore stima del valore misurato q' sarà:

$$q' = \bar{q} \pm i_q \quad (P\%) \qquad \text{(A2.6)}$$

ove il valore medio è ricavato da:

$$\bar{q} = f_1\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_L\right) \qquad \text{(A2.7)}$$

e l'incertezza i_q è ottenuta da:

$$i_q = f_2\left(i_{x1}, i_{x2}, ..., i_{xL}\right) \qquad \text{(A2.8)}$$

Definito l'indice di sensibilità come:

$$J_i = \frac{\partial q}{\partial x_i}\Big|_{x=\bar{x}} \qquad i = 1, 2, ..., L \qquad \text{(A2.9)}$$

in riferimento ai cambiamenti di ogni x_i riguardo q; il contributo quindi dell'incertezza di x_i al risultato q è stimato dal termine ($J_i\, i_{xi}$). La stima più probabile di i_q è data dalla formula:

$$i_q = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^{L} \left(J_i i_{xi}\right)^2} \qquad (P\%) \qquad \text{(A2.10)}$$